Movimiento Plano General, Cinética

Dr. José Antonio Silva Rico Julio 2018

Introducción

En este documento se estudiará el movimiento de cuerpos rígidos en el plano. Considerando que se trata del estudio de la cinética, se tomarán en cuenta las fuerzas y momentos que originan el movimiento. Además, es necesario consideran las dimensiones de los cuerpos, así como la localización de los puntos donde las fuerzas son aplicadas sobre el cuerpo.

Primero es importante tener en cuenta que un cuerpo rígido es una idealización, en la cual todas las partículas que conforman el cuerpo mantienen la misma distancia relativa las unas de las otras.

Partiendo de esta premisa, se estudiará la cinética de un cuerpo rígido mediante el análisis de las fuerzas aplicadas a un sistema de de partículas y al movimiento que estas generan.

Ecuaciones cinéticas de movimiento

Para ayudar en la obtención de las ecuaciones cinéticas se emplea la Fig. 1 en la cual se muestran algunas de las partículas que conforman un cuerpo, cuya frontera o superficie está representada por la línea punteada. $\vec{F}_i$ es la fuerza externa resultante por el efecto gravitacional, de campos magnéticos o eléctricos, o por fuerzas de contacto entre otros cuerpos adyacentes al cuerpo de estudio. Por otro lado, $\vec{f}_i$ representa la fuerza interna resultante de la interacción de las partículas que conforman el cuerpo rígido. Es decir, son las fuerzas de atracción o repulsión que mantienen equidistantes las partículas las unas de las otras.

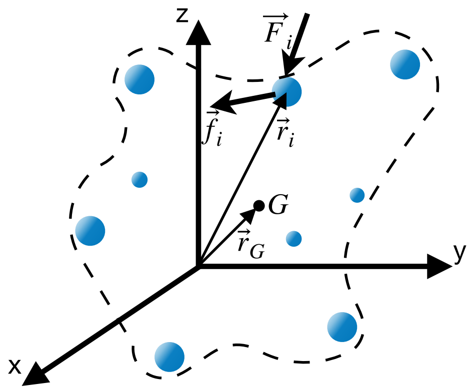

FIG. 1

Aplicando la ecuación de movimiento, $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, a la *i*-ésima partícula, se obtiene la siguiente expresión.

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$$

Al aplicar la misma ecuación a todas las partículas que conforman el cuerpo y sumar los efectos conjuntos se obtiene

$$\Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{f}_i = \Sigma m_i \vec{a}_i$$

De esta última expresión se puede omitir la suma de todas la fuerzas internas del sistema, ya que estas son las fuerzas de interacción entre partículas. Estas fuerzas ocurren en pares iguales colineales pero con sentidos opuestos. Por esta razón la suma de todas las fuerzas internas es igual a cero. Por la tanto, la expresión de movimiento resultante para todas las partículas que conforman el cuerpo es

$$\Sigma \vec{F}_i = \Sigma m_i \vec{a}_i$$

La parte izquierda de la igualdad de esta nueva expresión representa las fuerzas externas aplicadas a todas las partículas, es decir, todas las fuerzas externas aplicadas sobre el cuerpo rígido, que ahora se puede considerar como un solo elemento. Mientras que la expresión a la derecha de la igualdad expresa la aceleración que se genera en cada una de las partículas contenidas en el cuerpo multiplicada por su correspondiente masa. Esto puede representar un problema, ya que las aceleraciones de cada una de las partículas contenidas en el cuerpo pueden diferir. Por ese motivo, se busca el centro de masa G, que tienen la propiedad de ser el único punto de una distribución de masa en el que los vectores de posición ponderados relativos a este punto suman cero. Por lo tanto, este punto es el lugar donde la masa del cuerpo se puede considerar concentrada.

De esta forma, para hallar el centro de masa se emplea la siguiente expresión

$$\Sigma m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_G\right) = \overrightarrow{0}$$

Donde $\vec{r}_i$ representa los vectores de posición de todas partículas contenidas en el cuerpo y $\vec{r}_G$ representa el vector de posición donde está localizado el centro de masa del cuerpo. De esta expresión se distribuye el producto de la masas de las partículas dentro del paréntesis y uno de estos productos se pasa del otro lado de la igualdad.

$$\Sigma m_i \vec{r}_i = \Sigma m_i \vec{r}_G$$

Teniendo en cuenta que la suma de la masa de todas las partículas es igual a la masa del cuerpo, la sumatoria del lado derecho se cambia a la masa del cuerpo.

$$\Sigma m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_G$$

Finalmente, esta última expresión es derivada con respecto al tiempo dos veces asumiendo que la masa permanece constante dentro del cuerpo, obteniendo.

$$\Sigma m_i \overrightarrow{a}_i = m \overrightarrow{a}_G$$

Esta ecuación permite observar que a pesar de que las partículas contenidas en el cuerpo tengan diferentes aceleraciones, es posible analizar el movimiento de un cuerpo rígido considerando únicamente la aceleración del punto donde se localiza su centro de masa y concentrando toda la masa del cuerpo en ese punto.

De esta forma, la ecuación de movimiento de un cuerpo rígido es la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo igual a la masa del cuerpo multiplicada por el vector aceleración de su centro de masa.

$$\Sigma \overrightarrow{F} = m \overrightarrow{a}_G$$

Considerando el caso de estudio de este escrito, es decir, movimiento en el plano, esta ecuación vectorial se puede descomponer en dos ecuaciones escalares independientes, por ejemplo, las proyecciones en los ejes *x* y *y* como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m \left(a_G\right)_x \\ \Sigma F_y &= m \left(a_G\right)_y \end{aligned} \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que el movimiento plano general es una combinación de la traslación y la rotación de un cuerpo, es importante entender la manera en la que las fuerzas externas aplicadas a un cuerpo generan momentos los cuales son perpendiculares al plano de movimiento y producen la rotación del cuerpo.

Para este análisis se considera el diagrama de cuerpo libre de una de las partículas contenidas en el cuerpo, la cual está sujeta a la resultante de fuerzas externas representada por $\vec{F}_i$ y la resultante de fuerzas internas $\vec{f}_i$ que son causadas por la interacción con las partículas adyacentes a esta. Esto se ve representado en la parte izquierda de la Fig. 2. Del lado derecho de la misma figura se muestra el diagrama cinemático en donde la partícula de masa m_i está sujeta a una aceleración $\vec{a}_i$ en el instante mostrado.

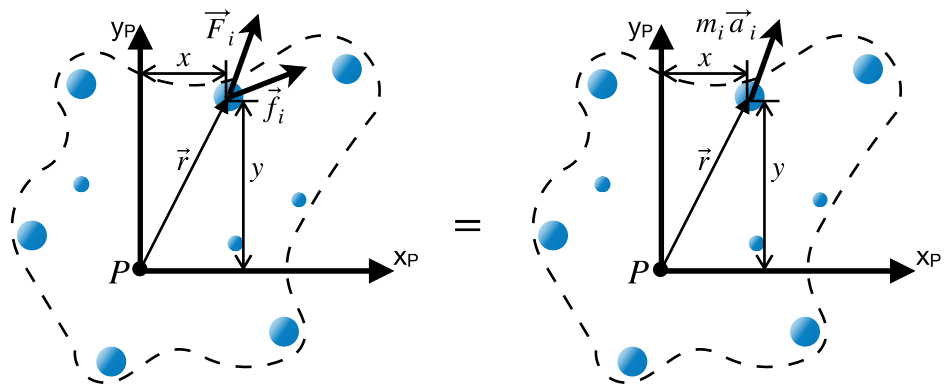

FIG. 2

Si se consideran los momentos con respecto al eje que cruza *P* generados por las fuerzas actuando sobre la partícula , se obtiene

$$\vec{r} \times \vec{F}_i + \vec{r} \times \vec{f}_i = \vec{r} \times m_i \vec{a}_i \qquad (2)$$

Si se hace la suma de las fuerzas aplicadas a todas las partículas a lo largo del cuerpo. El primer sumando del lado izquierdo de la igualdad corresponde a los momentos debido a las fuerzas externas y se puede representar como $\Sigma M_P \hat{k}$. Por otro lado, al hacer las suma de todos los momentos generados por las fuerzas internas, estas se eliminan, ya que todas se presentan en pares colineales y opuestas, por lo tanto, las suma de estos momentos es igual a cero.

Con lo que respecta al lado derecho de la igualdad, se tiene en cuenta que el cuerpo describe un movimiento plano general, es decir, se traslada y rota al mismo tiempo. Por lo tanto, la aceleración que presenta la partícula que se estudia se obtiene mediante la suma vectorial de varios elementos, que son: la aceleración del del punto P ($\overrightarrow{a}_p$); las aceleraciones tangencial y normal de la partícula, las cuales se calculan considerando la rotación del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano que pasa por el punto P y que se calculan usando las expresiones $\overrightarrow{\alpha} \times \vec{r}$ y $-\omega^2\vec{r}$ respectivamente.

Teniendo esto último en cuenta, se desarrolla el lado derecho de la igualdad obteniéndose lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\vec{r} \times m_i \overrightarrow{a}_i &= m_i \vec{r} \times \left(\overrightarrow{a}_P + \overrightarrow{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \right) \\
&= m_i \left[\vec{r} \times \overrightarrow{a}_P + \vec{r} \times \left(\overrightarrow{\alpha} \times \vec{r} \right) - \omega^2 \cancel{\left(\vec{r} \times \vec{r} \right)} \right] \\
&= m_i \left\{ \left(x\hat{i} + y\hat{j} \right) \times \left[\left(a_P\right)_x \hat{i} + \left(a_P\right)_y \hat{j} \right] + \left(x\hat{i} + y\hat{j} \right) \times \left[\alpha\hat{k} \times \left(x\hat{i} + y\hat{j} \right) \right] \right\} \\
&= m_i \left[x \left(a_P\right)_y - y \left(a_P\right)_x + \alpha x^2 + \alpha y^2 \right] \hat{k} \\
&= m_i \left[x \left(a_P\right)_y - y \left(a_P\right)_x + \alpha r^2 \right] \hat{k}
\end{aligned}
$$

Esta expresión está siendo aplicada a una de las partículas del cuerpo. Con la finalidad de aplicarla a todas las partículas que conforman el cuerpo se define $m_i = dm$ y se calcula la integral de toda la masa, para así obtener el efecto sobre todo el cuerpo. Finalmente, considerando el desarrollo de ambos lados de la igualdad de la ecuación (2) y que todos los vectores actuar en dirección $\hat{k}$, este vector unitario puede ser omitido de las ecuaciones quedando la expresión escalar que se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
+ \circlearrowleft \Sigma M_P &= \int \left[x \left(a_P\right)_y - y \left(a_P\right)_x + \alpha r^2 \right] dm \\
&= \left(a_P\right)_y \int x dm - \left(a_P\right)_x \int y dm + \alpha \int r^2 dm
\end{aligned}
$$

Las integrales de los primeros dos sumandos del lado derecho de la igualdad corresponden a las proyecciones sobre los ejes x y *y* del vector que va del punto P al centro de masa del cuerpo multiplicadas por la masa del cuerpo, es decir $\bar{x}m$ y $\bar{y}m$. Estos elementos se ven representados en la Fig. 3.

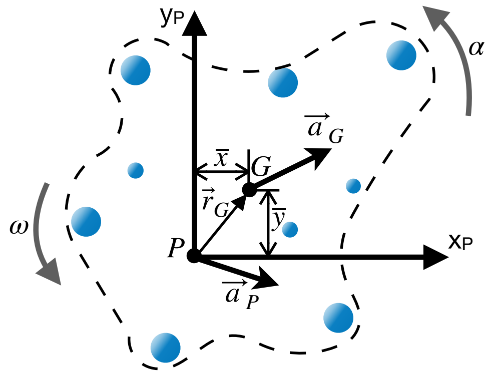

FIG. 3

Con lo que respecta al la última integral, esta corresponde al momento de inercia del cuerpo con respecto al un eje de giro que pasa por P, el cual se representa como I_P. Por la que la ecuación se puede reescribir como se muestra a continuación.

$$+ \circlearrowleft \Sigma M_P = \left(a_P\right)_y m\bar{x} - \left(a_P\right)_x m\bar{y} + I_P\alpha \qquad (3)$$

Esta ecuación se simplifica si la localización del punto P coincide con la del centro de masa, ya que de esta manera $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son iguales a cero. Debe tomarse en cuenta que si el punto P coincide con el centro de masas, entonces la sumatoria de todos los momentos, así como el momento de inercia del cuerpo, son calculados con respecto a un eje que cruza el centro de masa. Por la tanto se obteniendo la siguiente expresión.

$$+ \circlearrowleft \Sigma M_G = I_G\alpha$$

Esta ecuación resulta conveniente porque es simple y porque usualmente se suelen proporcionar los datos para calcular el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje que cruza su centros de masa. Sin embargo, en ocasiones resulta más conveniente calcular la suma de momentos en un eje que pase por un punto diferente al centro de masa, ya que en este otro punto un mayor número de fuerzas pueden concurrir, por lo tanto, al elegir esta nueva localización se reduce el número de momentos debidos a fuerzas externas y el número de variables involucradas en el análisis también será reducido.

Por tal motivo, se modifica la ecuación (3) reescribiendo el momento de inercia I_P como una función de I_G, mediante el empleo del teorema de ejes paralelos, $I_P = I_G + m\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$

$$
\begin{aligned}
+\circlearrowleft \Sigma M_P &= \left(a_P\right)_y m\overline{x} - \left(a_P\right)_x m\overline{y} + \left[I_G + m\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2\right)\right]\alpha \\
&= \overline{x}m\left[\left(a_P\right)_y + \alpha\overline{x}\right] + \overline{y}m\left[-\left(a_P\right)_x + \alpha\overline{y}\right] + I_G\alpha \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Del mismo modo $\overrightarrow{a}_P$ se expresa como función de $\overrightarrow{a}_G$ mediante el uso de la ecuación que expresa el movimiento relativo entre partículas mostrada a continuación

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{a}_G = \overrightarrow{a}_P + \overrightarrow{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2\vec{r} \\
&\left(a_G\right)_x \hat{i} + \left(a_G\right)_y \hat{j} = \left(a_P\right)_x \hat{i} + \left(a_P\right)_y \hat{j} + \alpha\hat{k} \times \left(\overline{x}\hat{i} + \overline{y}\hat{j}\right) - \omega^2\left(\overline{x}\hat{i} + \overline{y}\hat{j}\right) \\
&\hat{i}: \qquad \left(a_G\right)_x = \left(a_P\right)_x - \alpha\overline{y} - \omega^2\overline{x} \\
&\hat{j}: \qquad \left(a_G\right)_y = \left(a_P\right)_y + \alpha\overline{x} - \omega^2\overline{y}
\end{aligned}
$$

De $\hat{i}$ se obtiene $-\left(a_P\right)_x + \alpha\overline{y} = -\left(a_G\right)_x - \omega^2\overline{x}$ y de $\hat{j}$ $\left(a_P\right)_y + \alpha\overline{x} = \left(a_G\right)_y + \omega^2\overline{y}$. Al sustituir estas ecuaciones en (4) y simplificar la expresión se obtiene

$$+\circlearrowleft \Sigma M_P = \overline{x}m\left(a_G\right)_y - \overline{y}m\left(a_G\right)_x + I_G\alpha$$

o de manera vectorial se puede expresar como

$$\Sigma M_P\hat{k} = \vec{r} \times m\overrightarrow{a}_G + I_G\overrightarrow{\alpha}$$

En este caso, todos los momentos están definidos con respecto al eje que pasa por el punto P. Sin embargo, los elementos que están al lado derecho de la igualdad, que también se les llega a conocer como “momentos cinéticos”, están en función de la aceleración lineal y el momento de inercia que están definidos con respecto al centro de masa. Una forma abreviada de representar esta nueva expresión es la siguiente.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_P = \Sigma\left(\mathscr{M}_k\right)_P$$

Finalmente, considerando que la traslación y la rotación suceden al mismo tiempo, se pueden definir diferentes conjuntos de ecuaciones dependiendo de las características del problema que se esté analizando.

Si se considera el análisis cinético con un sistema de referencia inercial y que la suma de momentos es definida con respecto al centro de masa, las ecuaciones escalares a emplear son

$$\Sigma F_x = m\left(a_G\right)_x$$
$$\Sigma F_y = m\left(a_G\right)_y$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = I_G\alpha$$

Si la trayectoria que describe el centro de masa del cuerpo es curvilínea, en muchas ocasiones puede resultar conveniente emplear un sistema de coordenadas intrínsecas, por lo que las ecuaciones a emplear serían las siguientes

$$\Sigma F_t = m\left(a_G\right)_t = m\dot{v}$$
$$\Sigma F_n = m\left(a_G\right)_n = m\frac{v^2}{\rho}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = I_G\alpha$$

En donde ρ representa el radio de curvatura de la trayectoria que sigue el centro de masa en el instante que se analiza el movimiento.

Finalmente, si se desea realizar la suma de momentos con respecto a un punto diferente al centro de masa debido a las fuerzas externas aplicadas sobre el cuerpo, igualmente se pueden usar un marco de referencia inercial o intrínseco, por lo tanto, se usa alguno de los siguientes conjuntos de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= m\left(a_G\right)_x\\ \Sigma F_y &= m\left(a_G\right)_y\\ +\circlearrowleft \Sigma M_P &= \Sigma\left(\mathscr{M}_k\right)_P\end{aligned}\right\}\text{Inercial}\qquad \left.\begin{aligned}\Sigma F_t &= m\left(a_G\right)_t = m\dot{v}\\ \Sigma F_n &= m\left(a_G\right)_n = m\frac{v^2}{\rho}\\ +\circlearrowleft \Sigma M_P &= \Sigma\left(\mathscr{M}_k\right)_P\end{aligned}\right\}\text{Intrínseco}$$

Ejemplo:

Para demostrar el uso del algunos de los grupos de ecuaciones presentadas, se considerará un cilindro de radio r, el cual es colocado sobre un superficie que tiene un ángulo de inclinación θ, como se muestra en la figura 4. El objetivo de este ejemplo es hallar las ecuación es que permiten el calculo de la aceleración lineal y angular del cilindro. Para este análisis se considera que el cilindro tiene una masa m, un radio de giro con respecto al centro de masa k_G y que la fricción con la superficie es lo suficientemente grande para evitar deslizamiento.

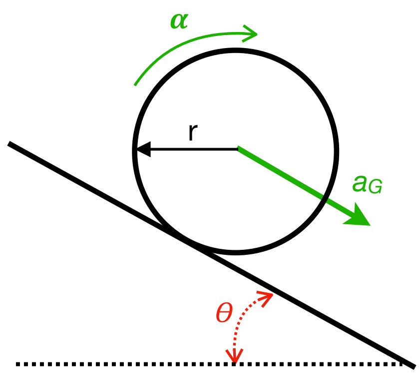

FIGURA 4

Resolución:

Al soltar el cilindro, este presentará un movimiento plano general, ya que se trasladará y rodará al mismo tiempo, por lo tanto, se puede usar cualquier grupo de ecuaciones antes mostradas para resolver el problema. Independientemente de las ecuaciones que se seleccionen, es importante primero definir el sistema de referencia y las fuerzas que actúan en el sistema. Por tal motivo, primero se procede a hacer el diagrama del cuerpo libre del cuerpo de interés.

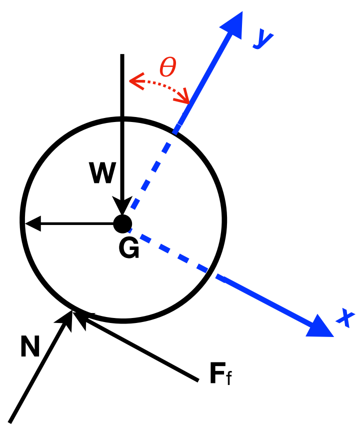

FIGURA 5

Considerando que al moverse el cilindro, su centro de masa describirá una trayectoria recta, se decide emplear un sistema de coordenadas inercial para resolver el problema. En el diagrama de cuerpo libre desarrollado (Fig. 5), se seleccionó rotar los ejes coordenados de tal forma que el eje x sea colineal a la aceleración del centro de masa $\vec{a}_G$, además, por la naturaleza del movimiento se asume que este desarrollará una aceleración angular α en sentido horario.

Teniendo en cuenta que se tiene como datos la masa y el radio de giro, el peso y el momento de inercia se calcula con $W = mg$ y $I_G = mk_G^2$.

Observando los elementos presentes en los diagrama cinético y de cuerpo libre (Fig. 4, 5), se tienen 4 elementos desconocidos N, F_f, a_G y α.

Solución 1:
Para esta solución se considera la suma de momentos con respecto al centro de masas en las ecuaciones de rotación.

$$\Sigma F_x = m\left(a_G\right)_x \qquad \Longrightarrow -F_f + mg\sin\theta = m\left(a_G\right)_x \qquad (a)$$

$$\Sigma F_y = m\left(a_G\right)_y \qquad \Longrightarrow \quad N - mg\cos\theta = 0 \qquad (b)$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = I_G\,\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad -F_f r = -mk_G^2\,\alpha \qquad (c)$$

Estas tres ecuaciones no son suficientes para encontrar las variables deseadas, por lo que se requiere de una cuarta ecuación. Esta ecuación se puede tomar del análisis cinemático que relaciona la translación con la rotación. Teniendo en cuenta que no hay deslizamiento entre el cilindro y la superficie la aceleración del centro de gravedad y la aceleración angular se pueden relacionar a través de la siguiente expresión

$$\left(a_G\right)_x = \alpha r \qquad (d)$$

Con esta nueva ecuación, se inician sustituciones para encontrar el valor de $\left(a_G\right)_x$ y α. Primero se sustituye la ecuación (d) en la (a) obteniendo.

$$-F_f + mg\sin\theta = m\alpha r \qquad (e)$$

Considerando que no se desea obtener la fuerza de fricción, de la ecuación (c) se despeja F_f y se sustituye en (e) obteniendo

$$-\frac{\cancel{m}k_G^2\alpha}{r} + \cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\alpha r \qquad (f)$$

En esta última expresión solo se requiere despejar α para obtener una de las incógnitas del problema y finalmente sustituir este resultado en *(d)* para hallar la aceleración del centro de masa.

$$\alpha = \frac{rg\sin\theta}{k_G^2 + r^2} \quad (g) \qquad\qquad \left(a_G\right)_x = \frac{r^2 g\sin\theta}{k_G^2 + r^2} \quad (h)$$

Solución 2:

Otro modo de resolver este problema es considerando los momentos con respecto a un eje que cruza un punto diferente al centro de masa. Esto se hace para reducir el número de variables involucradas, por lo que es conveniente colocar al eje con respecto al que se hace la suma de momentos en el punto de contacto del cilindro y el plano, es decir, punto P. De este modo, la fuerza de fricción y la normal no producirán ningún momento. La única fuerza externa que sigue produciendo momento es el peso, cuyo brazo de palanca es $r \sin\theta$, que es la distancia más corta entre la línea de aplicación de la fuerza al punto P. Esto se puede ver en la figura 6.

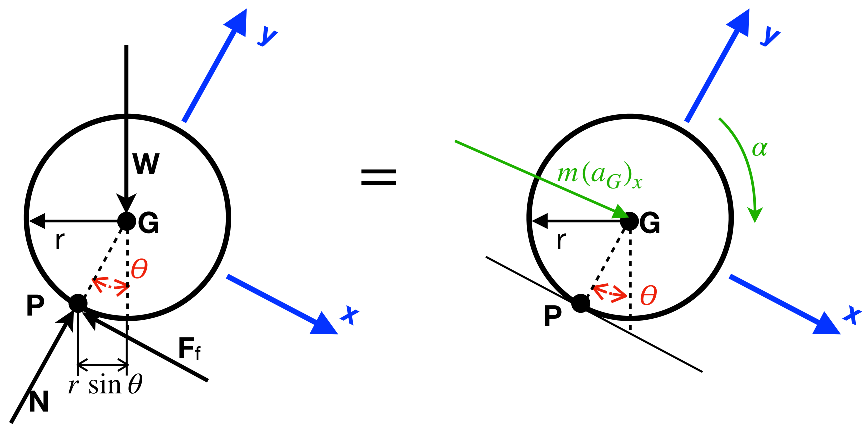

FIGURA 6

De esta forma no es necesario usar todas las ecuaciones del grupo que considera el sistema inercial y la suma de momentos en el punto P. De este grupo solo se usa la última ecuación que implica los efectos de la rotación.

$$+ \circlearrowleft \Sigma M_P = \Sigma \left(\mathscr{M}_k\right)_P = \bar{x} m \left(a_G\right)_y - \bar{y} m \left(a_G\right)_x + I_G \alpha \quad \Longrightarrow \quad -\cancel{m} g r \sin\theta = -r\cancel{m}\left(a_G\right)_x - \cancel{m} k_G^2 \alpha \qquad (i)$$

Adicionalmente se utiliza la ecuación (d) que relaciona la aceleración lineal con la angular, que al sustituirla en (i) se obtienen las mismas expresiones de la solución 1.

$$\alpha = \frac{rg \sin\theta}{k_G^2 + r^2} \quad (j) \qquad\qquad \left(a_G\right)_x = \frac{r^2 g \sin\theta}{k_G^2 + r^2} \quad (k)$$