MOVIMIENTO PLANO GENERAL – CINEMÁTICA

Ing. Eduardo Valentín Talavera Moctezuma **Septiembre 2018**

Para simplificar el estudio del movimiento del cuerpo rígido (que es aquel cuerpo que se considera indeformable) se hace referencia a dos tipos de movimiento que pueden ocurrir en éste, dichos tipos de movimiento son conocidos como traslacional y rotacional. El movimiento traslacional es aquel que se genera cuando todas las partículas de un cuerpo rígido se mueven con la misma velocidad y aceleración siguiendo una trayectoria recta o curvilínea. Por otra parte, el movimiento rotacional es aquel donde todas las partículas del cuerpo se mueven en torno a un eje fijo.

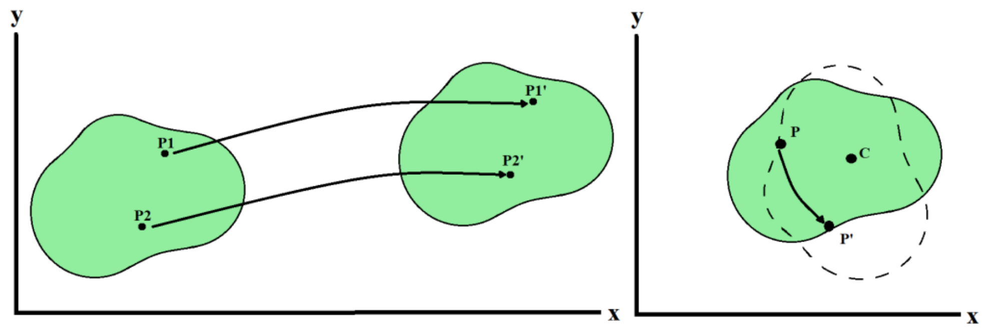

Figura 1. Traslación de los puntos P1 y P2 a P1’ y P2’ (izquierda) y Rotación del punto P a P’ en torno a un eje que pasa por el punto C y perpendicular al plano de movimiento (derecha)

Ambos movimientos pueden presentarse de forma individual al analizar la cinemática de un cuerpo rígido, generándose los casos de estudio de traslación pura y rotación pura. Pero cuando el movimiento de un cuerpo rígido no es puramente rotacional o traslacional sino una combinación de ambos, entonces, se presenta un caso de movimiento plano general.

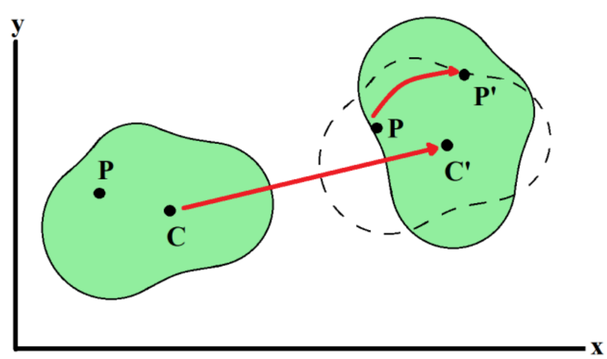

Figura 2. Movimiento plano general compuesto por una traslación de C a C’ y una rotación de P a P’ en torno a C

Un ejemplo de cuerpo que experimenta movimiento plano general es el de una llanta de automóvil cuyo centro esta en el punto C, en dicha llanta también podemos ubicar un segundo punto P en la periferia, conforme el automóvil avanza, el movimiento de C se describe a través de una línea recta mientras que la trayectoria de P, si bien es cierto que se está girando aparentemente en torno a C, también está trasladándose junto con el resto del automóvil generando un movimiento que es el resultado de la traslación del punto C en dirección a el movimiento del vehículo y la rotación de P respecto a C

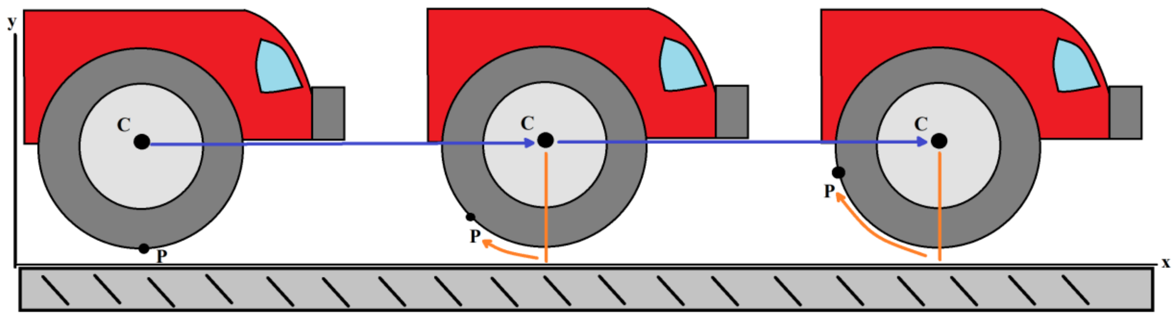

Figura 3. Movimiento plano general de una llanta. En la figura se aprecia que el movimiento del centro C de la llanta es de tipo traslacional y el movimiento del punto P ubicado en la periferia es rotacional con respecto del punto C, pero no es ni traslacional ni rotacional con respecto a los ejes coordenados "x" y "y".

Ecuaciones de Velocidad

Cuando se realiza el análisis de velocidad de un movimiento traslacional de un cuerpo, éste se realiza con respecto de un sistema de coordenadas fijo en el plano, a partir del cual se determina el cambio de posición a través del tiempo que experimenta el cuerpo en cuestión. En cuanto a las ecuaciones de velocidad de un movimiento rotacional, estas se plantean con respecto de un sistema de coordenadas fijo en el centro de rotación del cuerpo que experimenta este movimiento. En el caso del movimiento plano general al tratarse de la combinación de traslación y rotación, las ecuaciones de éste movimiento se plantean como la suma de una velocidad traslacional con respecto a un sistema coordenado fijo en el plano de análisis y una velocidad angular relativa del punto de análisis del cuerpo rígido con respecto de su centro de rotación.

Retomando el ejemplo de la llanta de automóvil, si consideramos a esta como una placa circular situada en el plano XY cuyos ejes coordenados permanecen fijos en el espacio, las ecuaciones de velocidad del punto P van a estar determinadas por la velocidad traslacional del punto C con respecto al eje coordenado XY al cual se le llama $\overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{C}}$, mas, la velocidad angular del punto P en torno al eje que pasa por el punto C y perpendicular al plano de movimiento, siendo esta una velocidad relativa de P con respecto de C la cual se expresa como $\overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$

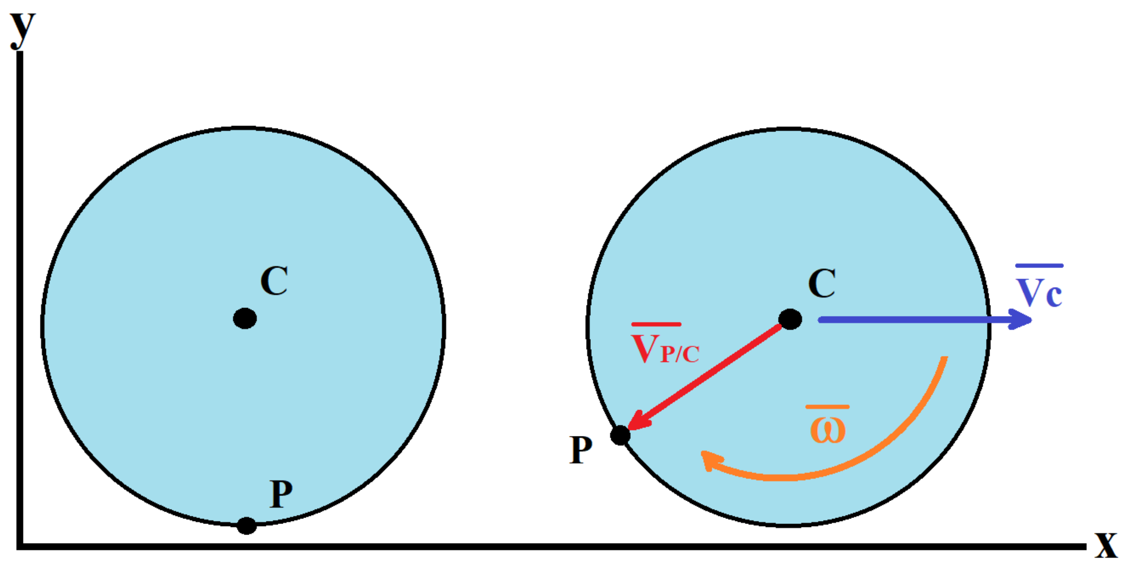

Figura 4. Velocidad de un cuerpo rígido que experimenta movimiento plano general: El vector $\overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{C}}$ es la velocidad lineal que experimenta el centro de rotación del cuerpo C, P es cualquier punto de análisis en el cuerpo rígido, el vector $\overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$ es el vector que va desde el centro de rotación al punto de análisis P y ω es la velocidad angular del cuerpo con respecto de C

La expresión matemática que representa el movimiento del cuerpo rígido anteriormente descrito es la siguiente:

$$\overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}} = \overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{C}} + \overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} \quad \cdots (\mathbf{1})$$

Si se quiere obtener una expresión matemática mas extensiva de la ecuación anterior, bastará recordar que la velocidad relativa de P con respecto de C que se expresa mediante el término $\overline{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$ es el resultado del producto vectorial entre el vector de velocidad angular del cuerpo entorno al eje perpendicular al plano de movimiento (para este ejemplo el eje z) el cual se expresa como $\boldsymbol{\omega}\hat{\boldsymbol{k}}$ y el vector que va desde el centro de rotación del cuerpo hasta el punto de análisis representado por la expresión $\overline{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$

$$\bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{\omega}\hat{\boldsymbol{k}} + \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} \quad \cdots (\mathbf{2})$$

Sustituyendo la expresión $(\mathbf{2})$ en $(\mathbf{1})$

$$\bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}} = \bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{\omega}\hat{\boldsymbol{k}} + \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} \quad \cdots (\mathbf{3})$$

Finalmente, la expresión $(\mathbf{3})$ se puede considerar como la ecuación que describe el comportamiento de la velocidad de un punto P cualquiera situado en un cuerpo rígido que experimenta traslación respecto a un eje coordenado fijo y rotación respecto a un punto C.

Ecuaciones de Aceleración

Una vez que se tienen las ecuaciones de velocidad del movimiento plano general de un cuerpo rígido y se quieren conocer las respectivas ecuaciones de aceleración, bastará con derivar la expresión $(\mathbf{1})$ con respecto del tiempo, de tal forma que ahora la ecuación represente el cambio de la velocidad de un punto P del cuerpo con respecto del tiempo, en otras palabras, la aceleración de dicho punto.

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}}) = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{C}} + \bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}\right)$$

$$\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}} = \bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{C}} + \bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} \quad \cdots (\mathbf{4})$$

El término $\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{C}}$ de la ecuación $(\mathbf{4})$ corresponde a la aceleración traslacional del centro de rotación del cuerpo rígido y el término $\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$ es la aceleración relativa de P con respecto de C, dicha expresión al ser el resultado de derivar el término $\bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$ con respecto del tiempo puede ser escrita de la siguiente manera

$$\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{\omega}}}{\boldsymbol{dt}} \times \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbb{V}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$$

$$\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} \times \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}})$$

$$\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} \times \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}\, \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} \quad \cdots (\mathbf{5})$$

Sustituyendo la expresión $(\mathbf{5})$ en $(\mathbf{4})$

$$\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{P}} = \bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{C}} + \overline{\boldsymbol{\alpha}} \times \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}\, \bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}} \cdots (\mathbf{6})$$

La ecuación $(\mathbf{6})$ es el modelo matemático de la aceleración de un punto P cualquiera de un cuerpo rígido considerando la aceleración traslacional $\bar{\mathbb{a}}_{\boldsymbol{C}}$ de su centro de rotación, la aceleración angular $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ del cuerpo en torno a C, el vector $\bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$ que va desde el centro de rotación C del cuerpo al punto P de análisis y la velocidad angular ω del cuerpo entorno al punto C y un eje perpendicular al plano de movimiento.

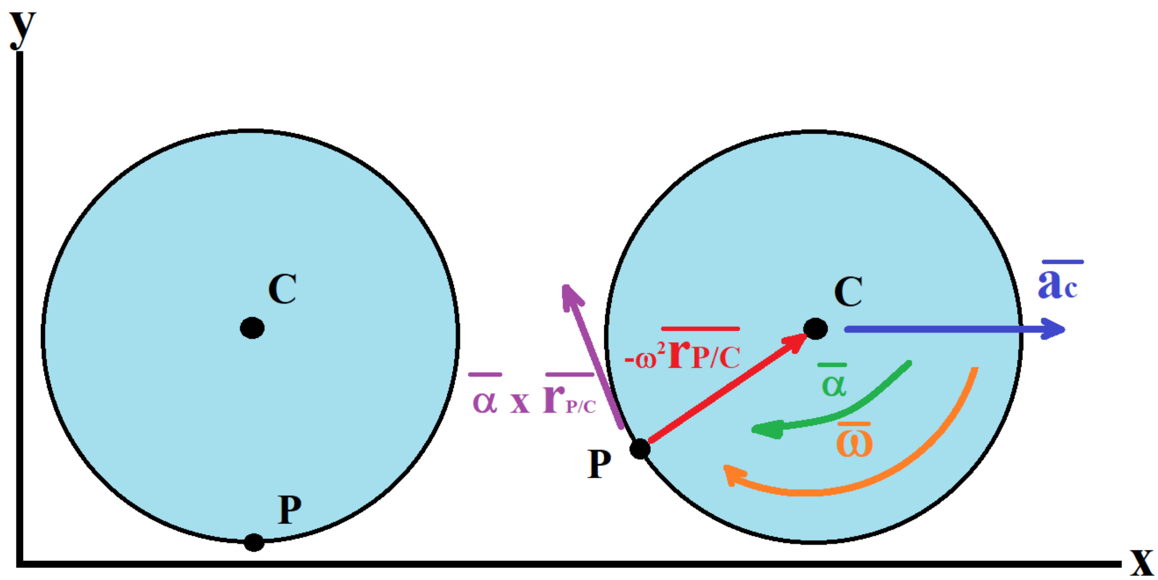

Figura 5. Aceleración de un cuerpo rígido que experimenta movimiento plano general: El vector $\mathbb{a}_C$ es la aceleración lineal que experimenta el centro de rotación del cuerpo C, P es cualquier punto de análisis en el cuerpo rígido, el vector $\bar{\mathbb{r}}_{\boldsymbol{P}/\boldsymbol{C}}$ es el vector que va desde el centro de rotación al punto de análisis P , ω es la velocidad angular del cuerpo con respecto de C y α es la aceleración angular del cuerpo con respecto de C.