MÉTODO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

M. C. José Ramón Fonseca Velázquez
Enero 2018

El método que se tratará a continuación, es básico para resolver problemas de movimiento, sobre todo aquellos en donde se involucren fuerza, masa, velocidad y tiempo. Lo interesante del método reside en el estudio y resolución de problemas de movimiento impulsivo[*] o impacto.

Considérese una partícula de masa *m* sobre la cual actúa la fuerza resultante $\bar{F}$. Escribiendo la Segunda Ley de Newton como sigue:

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) \quad \text{--(1)}$$

donde $m\bar{v}$ es el momentum lineal o la cantidad de movimiento de la partícula. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por *dt* e integrándola desde un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2, se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 \quad \text{--(2)}$$

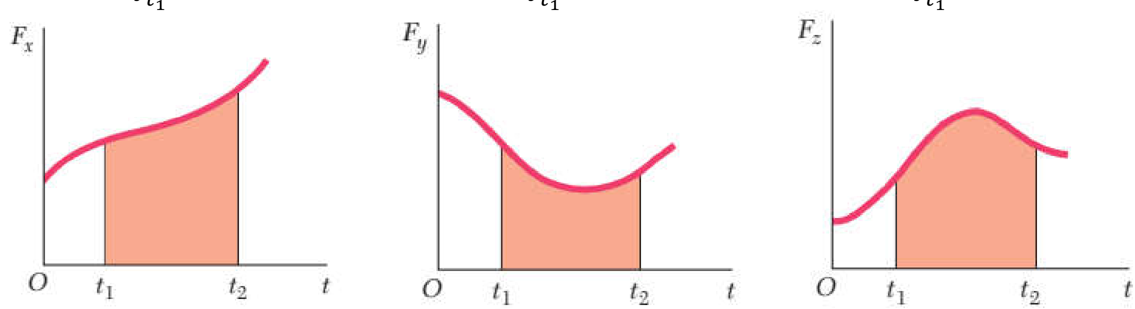
A la integral de la ecuación se le conoce como *Impulso lineal* de $\bar{F}$ durante el periodo de tiempo comprendido entre t_1 y t_2. De modo que se puede definir al *Impulso lineal* o simplemente *impulso*, al producto de cada una delas fuerzas que actúan sobre una partícula por el intervalo de tiempo que la mueven.

Comúnmente se escribe: *"la cantidad de movimiento (momentum lineal) inicial, más el impulso de todas las fuerzas, es igual a la cantidad de movimiento final"*, o bien:

$$m\bar{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt = m\bar{v}_2 \quad \text{--(3)}$$

al tratarse de una ecuación vectorial se tiene lo siguiente para cada dirección o componente:

$$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2; \quad (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = (mv_y)_2; \quad (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = (mv_z)_2$$



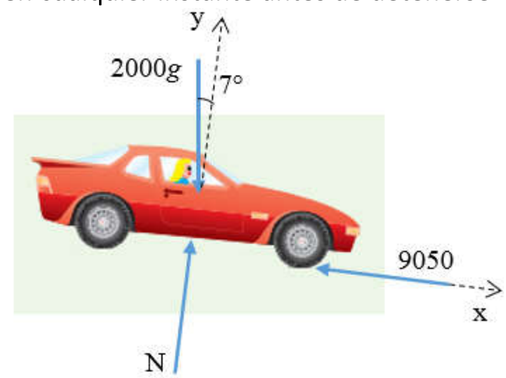
El área bajo cada una de las curvas es la componente correspondiente del *impulso*.

---

[*] Movimiento impulsivo.- Cuando una fuerza actúa sobre una partícula durante un periodo de tiempo muy pequeño pero suficientemente grande para producir un cambio definido en el momentum, a la fuerza se le llama *fuerza impulsiva* y al movimiento que resulta se le conoce como *movimiento impulsivo*.

Ejemplo. Un automóvil de 2 toneladas se mueve hacia abajo por un camino que forma un ángulo de 7° con respecto a la horizontal con una rapidez de 120 km/h. En dicho instante se aplican los frenos en todas las llantas originando una fuerza de frenado de 9050 newton. Determinar el tiempo que transcurre hasta que el auto se detiene.

Sol. Se tendría el siguiente D.C.L. del auto en cualquier instante antes de detenerse



Al mismo tiempo se propone el marco de referencia x-y mostrado, y sea *g* la aceleración de la gravedad. Empleando, la ecuación (3) para la dirección *x*:

$$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2$$

observando que F_x es la resultante de las componentes en *x* de las fuerzas que actúan sobre el auto (moviéndolo) durante el tiempo que lo hacen. En este caso las componentes son constantes en el tiempo y $v_2 = 0$:

$$(mv_x)_1 + 2000g(sen7°)t - 9050t = 0$$

$$(2000[kg])\left(120\left(\frac{1}{3.6}\right)\left[\frac{m}{s}\right]\right) + \left((2000)(9.81)(sen7°) - 9050\right)[N]t = 0$$

$$t = \frac{-66666.67\left[\frac{kgm}{s}\right]}{-6659\left[\frac{kgm}{s^2}\right]} \quad \therefore \quad \boxed{t = 10.01\ s}$$

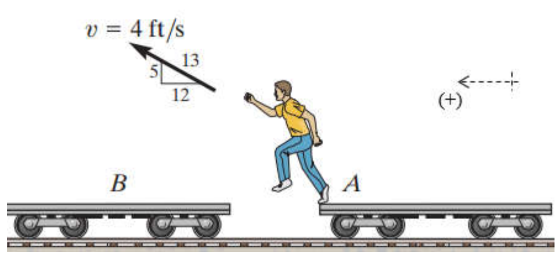
Conservación del Momentum Lineal

Cuando dos interactúan entre sí, es decir, sin que exista alguna fuerza externa actuando sobre ellas, a la acción o impulso que ocasione una partícula a la otra corresponderá un impulso o reacción en sentido contrario y de misma magnitud según la Tercera Ley de Newton, entonces la ecuación (3) para dos partículas A, B queda como:

$$m_A\bar{v}_{A_1} + m_B\bar{v}_{B_1} = m_A\bar{v}_{A_2} + m_B\bar{v}_{B_2} \quad \text{--(4)}$$

lo que equivale a que el *momentum lineal de las partículas se conserva*.

Ejemplo. Un individuo salta del carro *A* con una velocidad relativa al carro como se muestra. Aterriza en el carro *B*, determine la rapidez del carro *A* después del movimiento del individuo. El individuo pesa 60 lb los carros 80 lb y estos se encuentran inicialmente en reposo. La rapidez de *B* se deja al lector.



No existen fuerzas externas que actúen sobre las "partículas" (carros *A*, *B* e individuo *P*); al emplear la ecuación (4) en dirección horizontal (positiva a la izquierda):
$(m_P v_P)_1 + (m_A v_A)_1 = (m_P v_P)_2 + (m_A v_A)_2$
El miembro izquierdo de la igualdad es *cero*, pues los cuerpos están inicialmente en reposo; además, al saltar *P*, *A* irá hacia la derecha (negativa según la referencia):

$$\therefore (m_P v_P)_2 = (m_A v_A)_2 \ \rightarrow v_A = \frac{m_P}{m_A}(v_P)_2 \quad \text{--(I)}$$

Por otro lado, $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{P/A}$; donde, en dirección horizontal $v_{P/A} = 4\left(\frac{12}{13}\right)\ ft/s$, de modo que:

$(v_P)_2 = -v_A + v_{P/A}$ --(II); de (I) y (II) despejando a $(v_P)_2$ se obtiene: $(v_P)_2 = -\frac{m_P}{m_A}(v_P)_2 + 4\left(\frac{12}{13}\right)$

Resultando $(v_P)_2 = 2.11 ft/s$ y entonces $(v_A)_2 = -1.582 ft/s$, o bien $\boxed{(v_A)_2 = 1.582 ft/s\ \rightarrow}$

Movimiento Impulsivo

Cuando una fuerza actúa sobre una partícula durante un periodo de tiempo muy pequeño pero la fuerza es suficientemente grande para producir un cambio definido en el momentum, a la fuerza se le llama *fuerza impulsiva* y al movimiento que resulta se le conoce como *movimiento impulsivo*.

Cuando fuerzas impulsivas actúan sobre una partícula, la ecuación (3) se vuelve:

$$m\bar{v}_1 + \bar{F}_{imp}\Delta t = m\bar{v}_2 \quad \text{--(5)}$$

donde $\bar{F}_{imp}$ es la resultante de las fuerzas impulsivas. En general, se desprecia todo impulso causado por fuerzas no impulsivas debido a que el producto $\bar{F}\Delta t$, donde $\bar{F}$ no es impulsiva, es muy pequeño (al ser Δt muy corto).

Análogamente, si todas las fuerzas externas actuando sobre una o varias partículas, **no** son impulsivas se *conservaría el momentum lineal*. De modo que para dos partículas A, B se tendría la ecuación (4).

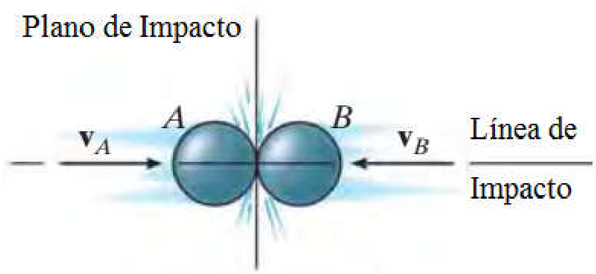
En otras palabras, el momentum de las partículas se conserva. Por otro lado, la energía de dichas partículas, en su interacción unas con otras, no se conserva como se verá a continuación.

Impacto

El impacto ocurre cuando dos partículas colisionan una con otra durante un periodo corto de tiempo, originando que relativamente grandes fuerzas (impulsivas) sean ejercidas entre las partículas. Siempre habrá pérdida de energía en el impacto, a menos que se trate de un *impacto perfectamente elástico*.

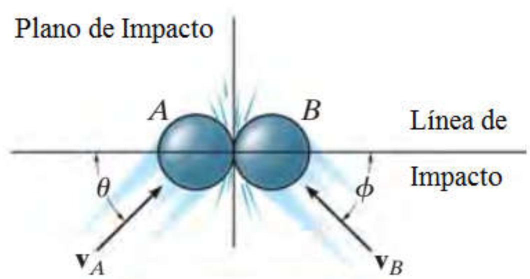
Existen dos tipos de impacto:

DIRECTO (CENTRAL)



La dirección del movimiento de las partículas que colisionan está a lo largo de la línea de impacto.

OBLÍCUO



El movimiento de una o ambas partículas origina un ángulo con respecto a la línea de impacto.

Sean dos partículas A y B con masas m_A y m_B respectivamente,

Si $(\bar{v}_A)_1 > (\bar{v}_B)_1$ antes del impacto, entonces después del impacto $(\bar{v}_B)_2 > (\bar{v}_A)_2$; y recordando que hay pérdida de energía (cinética):

$$(\bar{v}_A)_1 - (\bar{v}_B)_1 \leq (\bar{v}_B)_2 - (\bar{v}_A)_2$$

de modo que existe un número *e* tal que:

$$((\bar{v}_A)_1 - (\bar{v}_B)_1)e = (\bar{v}_B)_2 - (\bar{v}_A)_2 \quad \text{--(6)}$$

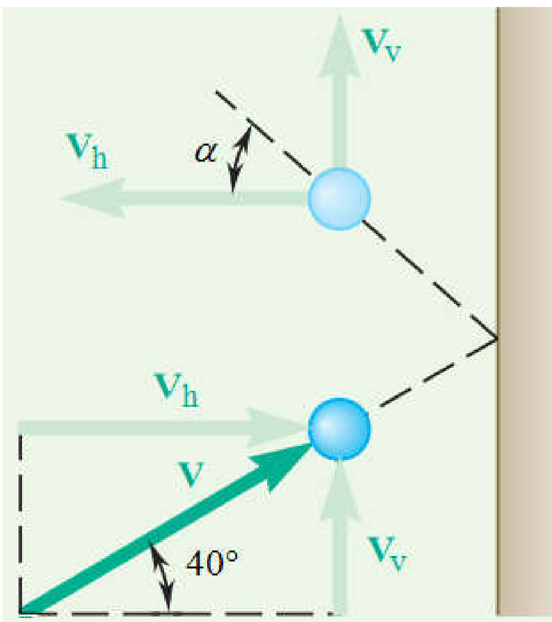
se sigue:

$$e = \frac{(\bar{v}_B)_2 - (\bar{v}_A)_2}{(\bar{v}_A)_1 - (\bar{v}_B)_1} \qquad \text{--}(7)$$

al número *e*, se le conoce como coeficiente de restitución. Puede tomar los valores desde el *cero* hasta el *uno*. Se puede apreciar que si es *uno*, se tendría un impacto perfectamente elástico y la cantidad de movimiento se conservaría. Por otro lado, si es *cero*, lo que estaría pasando es que después de impactar, las partículas adquirirían la misma velocidad, o bien, su velocidad relativa sería nula, y se trata de un choque perfectamente plástico.

Cabe señalar que para la correcta aplicación de la ecuación (7) en un problema de impacto oblícuo habrá que mantener la consistencia en las componentes de las velocidades, comúnmente se consideran aquellas a lo largo de la línea de impacto.

Ejemplo. Una pelota se lanza contra una pared vertical lisa, y justo antes de golpear su velocidad tiene una magnitud *v* y forma un ángulo de 40° con la horizontal. Determine la magnitud y dirección de la velocidad de la pelota cuando ha rebotado de la pared si *e*= 0.95.



Al ser incógnita la velocidad, sus componentes en dirección horizontal y vertical lo son también.
Se utilizarían las ecuaciones (4) y (7) para resolver el problema.
Primero:

$$(v_{P_h})_1 = vcos40° \text{ y } (v_{P_v})_1 = vsen40°$$

donde v_P es la rapidez de la pelota y, v_{P_h}, v_{P_v} son sus componentes escalares horizontal y vertical respectivamente. Como la pared es lisa, el impulso que ejerce sobre la pelota es *normal* a la pared. En consecuencia, la cantidad de movimiento en dirección vertical se conserva:

$$(v_{P_v})_2 = (v_{P_v})_1 = vsen40°$$

en cuanto a la componente horizontal:

$$(v_{M_h})_2 - (v_{P_h})_2 = e((v_{P_h})_1 - (v_{M_h})_1)$$

donde (v_{M_h}) es la componente horizontal de la velocidad de la pared.

De modo que: $0 - (v_{P_h})_2 = e((v_{P_h})_1 - 0)$ luego entonces $(v_{P_h})_2 = -0.95(vcos40°)$

$$\therefore (v_{P_h})_2 = -0.728v \text{ o bien } (v_{P_h})_2 = 0.728v \ \leftarrow$$

Lo que resulta en: $(v_P)_2 = \sqrt{v^2(0.728^2 + 0.643^2)}$ † y que $\alpha = ángtan(\frac{0.643}{0.728})$

$$\boxed{(\bar{v}_P)_2 = 0.971v \quad \nwarrow \ 41.5°}$$

† El módulo de un vector $\bar{a}$ es un escalar igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de sus componentes,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$